CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES

ENS Cachan - ENSAIS B - ENSAIT - ENSIETA - ESEM - ESIM - ISEP - ITECH
CONCOURS COMMUN ENSAM - CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Durée : 3 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pendant cette épreuve.

La qualité de l'expression et de la présentation des copies sera prise en compte dans la notation.

Le problème est consacré au calcul explicite des fonctions u, v, z qui sont définies dans la première partie.

Les parties I et II mettent en évidence quelques propriétés de ces fonctions.

Les parties III et IV aboutissent aux calculs explicites de ces fonctions à l'aide d'un paramètre λ.

Enfin la partie V propose le calcul numérique approché de λ.

PARTIE I

I.1. Montrer que, pour tout x réel, les intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\,dt \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\,dt \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}\,dt \quad \text{convergent.}$$

On définit alors 2 applications u et v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et une application z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$u \quad : \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$v \quad : \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$z \quad : \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

I.2. Étudier la parité des applications u et v et justifier la relation $z = u + iv$.

I.3. On pose $\lambda = u(0)$; montrer que $\lambda > 1 - \frac{1}{e}$.

PARTIE II

II.1. Montrer que, si $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale généralisée $I_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta t}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ converge absolument.

II.2.a Pour $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-\beta t}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$.

Effectuer le changement de variable défini par $t = u + n\pi$ et déterminer en fonction de n, le signe de x_n.

II.2.b. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge, et a pour somme I_β.

II.2.c. Prouver que $I_\beta > 0$.

II.3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $v(x) > 0$. (On pourra effectuer un changement de variable dans l'intégrale définissant v). On admettra que, par un raisonnement analogue, on peut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x) > 0$.

II.4. Montrer qu'il existe une application unique ρ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et une application unique θ de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $z(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$.

PARTIE III

III.1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto e^{itx}$ (t réel fixé), justifier la relation :

$$\forall\ (x,h) \in \mathbb{R}^2,\ |z(x+h)-z(x)| \leq |h| \int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\,dt.$$

En déduire que les applications z, u, v, ρ et θ sont continues.

III.2. Montrer que, pour tout x réel, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{(-1+ix)t}\,dt$ converge.

III.3. Justifier la relation :

$$\forall\ \underset{h\neq 0}{(x,h)} \in \mathbb{R}^2,\ \left|\frac{z(x+h)-z(x)}{h} - i\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{(-1+ix)t}\,dt\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-t}\,dt.$$

En déduire que les applications z, u, v, ρ et θ sont dérivables.

III.4. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$. (On pourra utiliser une intégration par parties, que l'on justifiera). En déduire que les applications z, u, v, ρ et θ sont indéfiniment dérivables.

PARTIE IV

IV.1. En introduisant la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{-1}{x+i}$, trouver les primitives de l'application a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $a : x \mapsto \frac{-1}{2(x+i)}$.

IV.2 Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : y' = \frac{-1}{2(x+i)} y.$$

En déduire une expression de z (x) à l'aide du réel λ, défini au I.3.

IV.3. Pour tout x réel, exprimer u (x), v (x), ρ (x) et θ (x), par une expression dépendant de λ, mais ne contenant ni intégrales, ni fonctions trigonométriques.

PARTIE V

On se propose de rédiger un programme en Pascal pour calculer λ (défini au I.3.). Pour cela, on écrit : $\lambda = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt + \int_1^D \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt + \int_D^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$. On déterminera une valeur de D rendant la 3ème intégrale négligeable, puis on calculera la 1ère intégrale à l'aide d'une série et la 2ème par la méthode de Simpson.

Si n est un entier ≥ 1 et f une application de classe C^4 sur [a,b], la méthode de Simpson, pour calculer $I = \int_a^b f(t)\,dt$, consiste à adopter pour valeur approchée de I le réel

$$(1) \qquad S_n = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right],$$

avec $x_k = a + k\frac{b-a}{2n}$, $0 \leq k \leq 2n$. On admettra que :

$$(2) \qquad \left|\int_a^b f(t)dt - S_n\right| \leq \frac{M_4}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4} \text{ avec } M_4 = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

V.1. Calculer M_4 pour $f(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, a = 1 et b > 1.

V.2. Écrire en Pascal les fonctions suivantes :

FUNCTION f (t : real) : real ;

qui, à t > 0, associe $f(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$

FUNCTION SIMPSON (n : integer ; a,b : real) : real ;

qui, pour n, a et b fixés, calcule la valeur S_n définie par (1).

V.3. Soit $E \in]0, 10^{-1}]$.

Montrer que : $\forall\ D \in [1, +\infty[$, $\int_D^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \leq e^{-D}$.

En déduire un réel $D_0 \in [1, +\infty[$ tel que :

$\int_{D_0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt < 0{,}1\,E$.

V.4. Montrer que : $\forall\, t \in [0,1]$, $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{2q+1} (-1)^k \frac{t^k}{k!} \leq e^{-t} \leq \sum_{k=0}^{2q} (-1)^k \frac{t^k}{k!}$.

Ecrire en Pascal la procédure :

PROCEDURE SERIE (var p : integer ; var S : real) ;

qui calcule (p, S) tel que $S = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\frac{1}{2})}$ soit une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ à 0,2 E près.

V.5. Écrire en Pascal un programme calculant λ à 0,5 E près et affichant le résultat à l'écran. E sera déclaré comme une constante égale à 10^{-3}. On calculera D_0, puis, à l'aide de (2), un entier n tel que :

$\left|\int_1^{D_0} f(t)\,dt - \text{Simpson}(n, 1, D_0)\right| \leq 0{,}2.E$.

On utilisera les fonctions et procédures ci-dessus.